УДК 537.6

В.Г. Бар'яхтар, Ю.І. Горобець,
М.М. Потьомкін

МАГНІТНА ПАСТКА ДЛЯ ЛОКАЛІЗАЦІЇ МІКРОЧАСТИНОК У ПОТОЦІ РІДИНИ

Вступ

На сьогодні в багатьох галузях науки, таких, як фізика, техніка, хімія, біологія та інші, широко використовуються методи маніпулювання мікрооб'єктами за допомогою фізичних полів для утримання плазми [1], для захоплення атомів [2], зокрема, в клінічних дослідженнях [3], які дають можливість розв'язувати задачі вивчення взаємодії клітин і реакції окремих клітин на зовнішні подразники, випробовувати новітні препарати на клітинному рівні, а також використовувати їх для лікувальних цілей [4, 5].

Одним із перспективних методів таких досліджень є локалізація мікрочастинок за допомогою магнітної пастки. Його особливістю порівняно з іншими методиками є можливість маніпулювання окремими частинками, дослідження фізичних і біологічних властивостей клітини в природному середовищі [6, 7], вивчення механічних та адсорбційних властивостей ДНК [8, 9] тощо.

Однак з метою забезпечення умов, прийнятних для живих клітин, такі досліди зазвичай здійснюються у проточній рідині [10–12], що потребує врахування під час використання і проектування магнітних пасток додаткової сили, зумовленої наявним гідравлічним потоком. Тому розробка нових і вдосконалення існуючих методик дослідження магнітних пасток із врахуванням впливу сукупності сил, які діють на мікрочастинку, є актуальною науковою задачею.

Постановка задачі

Для того щоб локалізувати в просторі частинку, яка перебуває під дією магнітного поля, повинна виконуватися умова існування точки, де потенціальна енергія досягає свого локального мінімуму, тобто утворюється потенціальна яма. Оскільки в постійному магнітному полі для феро- та парамагнітних частинок досягнути такого локального мінімуму неможливо [13], то в даній статті пропонується використати змінне магнітне поле аналогічно методу, який ввів Капиця [14, 15]. Як буде показано далі, це дає змогу, створивши ефективний локальний мінімум енергії, вирішити питання локалізації частинки за допомогою змінного швидкоосцилюючого магнітного поля.

Числовий розрахунок магнітної пастки

Для того щоб локалізувати частинку за допомогою змінного швидкоосцилюючого поля, розглянемо феромагнітну частинку в магнітному полі, яке залежить від просторової координати $\mathbf{r}$. Тоді енергія U цієї частинки матиме вигляд

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{M}\mathbf{H},$$

де $\mathbf{H}$ – магнітне поле; $\mathbf{M}$ – магнітний момент частинки.

Для простоти розрахунків вважатимемо, що частинка намагнічена однорідно і її розміри набагато менші, ніж характерний масштаб зміни магнітного поля. Тоді в неоднорідному осцилюючому магнітному полі виникає осцилююча сила

$$\mathbf{f}(t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t).$$

Враховуючи це, записуємо рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \alpha\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

де m – маса частинки; α – дисипативний множник; $\dot{\mathbf{r}}$ – перша похідна по часу від просторової координати; $\ddot{\mathbf{r}}$ – друга похідна по часу від просторової координати.

Сила в загальному випадку має складну осцилюючу залежність від часу. У зв'язку з тим, що частинка під дією цієї сили може обертатися в рідині, крім того, магнітний момент під час перемагнічування змінним магнітним полем також матиме залежність від часу, розглядати рух такої частинки в осцилюючому магнітному полі досить складно. Але якщо сила, яка діє на частинку в змінному магнітному полі, має вигляд

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Phi(\mathbf{r})\cos\omega t, \tag{2}$$

де $\Phi(\mathbf{r})$ – деяка функція координат, то аналіз її руху може бути значно спрощений, аналогічно задачі Капиці [14, 15]. Тому далі будемо розглядати випадок, коли залежність сили від часу має синусоїдальний характер. Нижче буде обговорено, при яких умовах може бути реалізована така залежність.

Зважаючи на те, що рух частинки являє собою переміщення вздовж плавної траєкторії з одночасними малими осциляціями (з частотою ω) навколо неї, функцію $\mathbf{r}$ подамо у вигляді суми:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \xi, \quad (3)$$

де $\mathbf{R}$ – функція, яка описує "плавний" рух частинки; ξ – швидкоосцилююча компонента: $|\xi| << |\mathbf{R}|$.

Підставимо (3) в (1) і, розклавши $\nabla U(\mathbf{r})$ і $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ по малих зміщеннях ξ, з точністю до квадратичних по ξ членів отримаємо

$$m\ddot{\mathbf{R}} + m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\mathbf{R}} + \alpha\dot{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{R},t) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{R},t)}{\partial x_i}\xi_i, \quad (4)$$

де x_i – компоненти просторового вектора $\mathbf{r}$, $i = 1,2,3$.

Виділивши з отриманого виразу (4) осцилюючі члени, матимемо [14]

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{R},t). \quad (5)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$\xi = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \quad (6)$$

Взявши похідні від виразу (6) і підставивши їх у вираз (5), отримаємо систему

$$\begin{cases} -Am\omega^2 + B\alpha\omega = \nabla\Phi, \\ -Bm\omega^2 - A\alpha\omega = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Розв'язавши її, дістанемо значення коефіцієнтів A і B:

$$A = -\frac{m\nabla\Phi}{m^2\omega^2 + \alpha^2}, \quad B = \frac{\alpha\nabla\Phi}{m^2\omega^3 + \alpha^2\omega}.$$

Ці коефіцієнти підставимо у формулу (6) і знайдемо вираз для осцилюючої компоненти:

$$\xi(t) =$$

$$= -\frac{m\nabla\Phi}{m^2\omega^2 + \alpha^2}\cos\omega t + \frac{\alpha\nabla\Phi}{\omega(m^2\omega^2 + \alpha^2)}\sin\omega t. \quad (8)$$

Щоб отримати вираз для плавної компоненти, усереднимо вираз (4) за часом і матимемо

$$m\ddot{\mathbf{R}} + \alpha\dot{\mathbf{R}} = \overline{\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{R},t)}{\partial x_i}\xi_i}. \quad (9)$$

Для того щоб отримати явну залежність сили від часу, підставимо значення осцилюючої сили $\mathbf{f}(\mathbf{R},t)$ з виразу (2) та значення осцилюючої компоненти ξ у вираз (9), знайдемо

$$m\ddot{\mathbf{R}} + \alpha\dot{\mathbf{R}} = -\frac{m}{2(m^2\omega^2 + \alpha^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\Phi =$$

$$= -\frac{m}{2(m^2\omega^2 + \alpha^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\nabla\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi. \quad (10)$$

Остаточно матимемо

$$m\ddot{\mathbf{R}} + \alpha\dot{\mathbf{R}} = -\frac{m}{4(m^2\omega^2 + \alpha^2)}\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2. \quad (11)$$

Права частина виразу (11) є ефективною потенціальною енергією $U_{\text{еф}}$ у тривимірному просторі, яка має вигляд

$$U_{\text{еф}} = \frac{m}{4(m^2\omega^2 + \alpha^2)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2. \quad (12)$$

Як раніше зазначалося, потенціальна енергія феро- або парамагнітної частинки в магнітному полі не може мати мінімуму, що стосується і функції $\Phi(\mathbf{r})$, яка характеризує координатну залежність цієї енергії. Однак, якщо похідні функції $\Phi(\mathbf{r})$ в якій-небудь точці обертаються в нуль, то вираз $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2$, очевидно, може мати мінімум (наприклад, утвориться так звана сідлова точка). Через те ефективна потенціальна енергія, під впливом якої рухається магнітна частинка в магнітному полі, теж матиме мінімум, що сприятиме локалізації такої частинки.

Розглянемо, для прикладу, окремий випадок, коли описана ситуація реалізується, зокрема, якщо магнітне поле має вигляд

$$\mathbf{H}(t) = H_0\mathbf{e}_z + H_{1z}(t)\mathbf{e}_z + \mathbf{H}_{1\perp}(t),$$

де H_0 – стала компонента поля, яка спрямована вздовж осі z і не залежить від часу та координат; $\mathbf{e}_z$ – одиничний вектор вздовж осі z; $H_{1z}(t)$ і $\mathbf{H}_{1\perp}(t)$ – змінні компоненти поля (причому $H_{1z}(t)$ спрямована вздовж осі z,

$\mathbf{H}_{1\perp}(t) \in XOY$), потенціал якого описується формулою (2)

$$\Psi(r,z) = \frac{a}{3}z^3 - \frac{a}{2}zr^2 + \beta^2 r^2(x^2 - y^2),$$
$$H_0 >> |H_{1z}(t)| \sim |H_{1\perp}(t)|, \tag{13}$$

де a і β^2 — величини, пропорційні електричному струму в котушках [2].

Запишемо енергію частинки з магнітним моментом $\mathbf{M}(t)$ у зовнішньому магнітному полі $\mathbf{H}(t)$, яке пропорційне $\cos\omega t$, де ω — частота зовнішнього магнітного поля:

$$U = -\mathbf{M}(t)\mathbf{H}(t). \tag{14}$$

Нехай $H_0 >> H_{1\perp}$. Тоді розкладемо вектор магнітного моменту $\mathbf{M}(t)$ на дві компоненти — паралельну і перпендикулярну:

$$\mathbf{M} \approx M_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{M}_\perp,$$

де M_0 — проекція $\mathbf{M}$ на вісь z; $\mathbf{M}_\perp \in XOY$.

Піднесемо до квадрата $\mathbf{M}$ і з врахуванням (13) отримаємо

$$M^2 = M_0^2 + M_\perp^2 \approx M_0^2 \Rightarrow M_0 =$$
$$= \sqrt{M^2 - M_\perp^2} \approx M - \frac{1}{2}\frac{M_\perp^2}{M},$$

$$M_0 \approx M - \frac{1}{2}\frac{M_\perp^2}{M}.$$

Оскільки $H_\perp << H$ (відповідно, $M_\perp << M_0$), то квадратичною добавкою $M_\perp$ можна знехтувати порівняно з M_0.

Відповідно до формули (14), з точністю до лінійних членів по $M_\perp H_\perp$ отримаємо

$$U = -M_0 H_0 - M_0 H_{1z}(t). \tag{15}$$

Підставивши M замість M_0 в (15), з тією ж точністю матимемо

$$U = -MH_0 - MH_{1z}(t). \tag{16}$$

Запишемо вираз для сили на основі (16)

$$\mathbf{f} = -\nabla U. \tag{17}$$

Підставимо (16) в (17). Оскільки M стала величина і тому $\nabla M = 0$, то отримаємо

$$\mathbf{f} = M\nabla H_0 + M\nabla H_{1z}(t).$$

Якщо H_0 — однорідне магнітне поле, а $H_{1z}(t) = H_{1z}^{(0)}(\mathbf{r})\cos\omega t$, то маємо

$$\mathbf{f} = M\nabla H_{1z}^{(0)}(\mathbf{r})\cos\omega t. \tag{18}$$

Тоді координатна залежність сили (2) від часу набуде вигляду

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}) = M\nabla H_{1z}^{(0)}(\mathbf{r}). \tag{19}$$

Нехай $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t)$, де $\mathbf{H}_0$ — стала складова, а $\mathbf{h}(t)$ — змінна складова, яка має вигляд

$$\mathbf{h}(t) = H_{1z}(t)\mathbf{e}_z + \mathbf{H}_{1\perp}(t) =$$
$$= H_{1x}(t)\mathbf{e}_x + H_{1y}(t)\mathbf{e}_y + H_{1z}(t)\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{h}(t) = -\mathrm{grad}\Psi,$$

де Ψ — магнітостатичний потенціал (13), такий, що $\Delta\Psi = 0$; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — одиничні вектори, напрямлені відповідно вздовж осі x і y. Якщо струм осцилює з невеликою частотою ω, то можна вважати, що магнітне поле практично залишається магнітостатичним і умова $\Delta\Psi = 0$ залишається незмінною.

Використовуючи магнітостатичний потенціал (13), знаходимо $H_{1x}^0(r)\mathbf{e}_x$, $H_{1y}^0(r)\mathbf{e}_y$ та $H_{1z}^0(r)\mathbf{e}_z$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} H_{1x}^0(r)\mathbf{e}_x = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = \dfrac{2az}{3}x - \beta^2 x, \\ H_{1y}^0(r)\mathbf{e}_y = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = \dfrac{2az}{3}y + \beta^2 y, \\ H_{1z}^0(r)\mathbf{e}_z = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = -az^2 + \dfrac{a(x^2+y^2)}{3}. \end{cases} \tag{20}$$

Із врахуванням системи (20) перепишемо вираз (12) у такому вигляді:

$$U_{\text{еф}} = \frac{m}{4(m^2\omega^2 + \alpha^2)}\Phi^2(\mathbf{r}), \tag{21}$$

де

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}) = 2Ma\left(\frac{1}{3}x\mathbf{e}_x + \frac{1}{3}y\mathbf{e}_y - z\mathbf{e}_z\right).$$

Знайдемо вираз для сили $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = -\nabla U_{\text{еф}} = \nabla(-\Phi^2(\mathbf{r}))$$

або

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\Phi^2}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\Phi^2}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\Phi^2}{\partial z}\mathbf{e}_z =$$

$$= -\frac{8}{9}M^2a^2x\mathbf{e}_x - \frac{8}{9}M^2a^2y\mathbf{e}_y - 8M^2a^2z\mathbf{e}_z =$$

$$= -\frac{8}{9}M^2a^2(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + 9z\mathbf{e}_z).$$

Оскільки сила, яка діє на частинку, задається виразом (2), то матимемо

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = -\frac{8}{9}M^2a^2(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + 9z\mathbf{e}_z)\cos\omega t.$$

Зазначивши, що $U_{\text{еф}}$ додатна величина, яка пропорційна $\Phi^2(\mathbf{r})$, запишемо ефективну потенціальну енергію у вигляді

$$U_{\text{еф}} = \sigma\left(\frac{x^2+y^2}{9} + z^2\right), \qquad (22)$$

де $\sigma = M^2a^2\dfrac{m}{(m^2\omega^2+\alpha^2)}$.

Рівність (22) являє собою ефективну потенціальну енергію, яка розрахована за допомогою магнітостатичного потенціалу (13) і, очевидно, має мінімум у точці з координатами $x = y = z = 0$, тобто створюється потенціальна яма.

Висновки

Отримані результати досліджень показують, що використання методу [14, 15] дає змогу здійснювати моделювання магнітної пастки із врахуванням гідравлічної складової і пошук умов, за яких забезпечується локалізація феромагнітних мікрочастинок у заданій точці.

Подальшим напрямком проведення досліджень може бути більш докладне вивчення впливу характеристик магнітного поля, проточної рідини, мікрочастинки та початкових умов захоплення на траєкторію її руху у швидкоосцилюючому магнітному полі.

В.Г. Барьяхтар, Ю.И. Горобец, М.М. Потемкин

МАГНИТНАЯ ЛОВУШКА ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ МИКРОЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена модель магнитной ловушки, в основу которой положен метод движения под действием быстроосциллирующего магнитного поля, предложенного Капицей, и приведены расчеты для ее реализации и удержания ферромагнитных микрочастиц в потоке жидкости.

V.G. Bar’yakhtar, Yu.I. Gorobets, M.M. Potyemkin

MAGNETIC TRAP FOR LOCALIZATION OF MICROPARTICLES IN THE LIQUID STREAM

This paper considers the model of a magnetic trap, based on the movement method under quickly oscillating magnetic field, offered by Kapitsa. Moreover, we also make the calculations of its implementation and retention of ferromagnetic microparticles in the liquid stream.

1. *Каррерас Б.А., Ньюман Д., Линч В.Е., Даймонд П.Х.* Самоорганизованная критичность как парадигма для процессов переноса в плазме, удерживаемой магнитным полем // Физика плазмы. – 1996. – **22**, № 9. – С. 819–833.
2. *Кадомцев Б.Б., Кадомцев М.Б.* Конденсаты Бозе–Ейнштейна // Усп. физ. наук. – 1996. – **167**, № 6. – С. 649.
3. *Pankhurst Q.A., Connolly J., Jones S.K., Dobson J.* Applications of magnetic nanoparticles in biomedicine // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2003. – **36**. – P. 167–181.
4. *Mornet S., Vasseur S., Grasset F., Duguet E.* Magnetic nanoparticle design for medical diagnosis and therapy // J. of Materials Chemistry. – 2004. – **14**. – P. 2161–2175.
5. *Goya G.F., Grazъ V., M. R. and Ibarra.* Magnetic Nanoparticles for Cancer Therapy // Current Nanoscience. – 2008. – **4**. – P. 1–16.
6. *Hosu B.G., Jakab K., Banki P. et al.* Magnetic tweezers for intracellular applications // Rev. Sci. Instrum. – 2003. – **74**. – P. 4158–4163.
7. *AHB de Vries, Krenn B.E., van Driel R., Kanger J.S.* Micromagnetic tweezers for nanomanipulation inside living cells // Biophys. J. – 2005. – **88**. – P. 2137–2144.

8. *Zlatanova J., Leuba S.H.* Magnetic tweezers: a sensitive tool to study DNA and chromatin at the single-molecule level // Biochem. Cell Biol. – 2003. – **81**. – P. 151–159.

9. *Haber C., Wirtz D.* Magnetic tweezers for DNA micro-manipulation // Rev. Sci. Instrum. – 2000. – **71**. – P. 4561–4570.

10. *Lee S.C., Lee H., Westerwelt R.M.* Microelectromagnets for the control of magnetic nanoparticles // Appl. Phys. lett. – 2001. – **79**, N 20. – P. 3308–3310.

11. *Lee H., Purdon A.M., Westervelt R.M.* Manipulation of biological cells using a microelectromagnet matrix // Ibid. – 2004. – **85**, N 6. – P. 1063–1065.

12. *Deng T., Whitesides G.M., Radakrishnan M., Zabow G., Prentiss M.* Manipulation of magnetic microbeads in suspension using micromagnetic systems fabricated with soft lithography // Ibid. – 2001. – **78**, N 12. – P. 1775–1777.

13. *Филипс У.Д.* Лазерное охлаждение и пленение нейтральных атомов // Усп. физ. наук. – 1999. – **169**, № 3. – С. 305–322.

14. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Механика: В 10 т. Том I. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 204 с.

15. *Широносов В.Г.* Резонанс в физике, химии и биологии. – Ижевск.: Издательский дом “Удмуртский университет”, 2000. – 90 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
12 грудня 2008 року